ALTITUDES GEOPOTENCIALES, ORTOMÉTRICAS Y NORMALES OBTENIDAS POR COMPENSACIÓN

Una alternativa para la adopción de un Sistema de Referencia Vertical.

Mayor Ing. Militar Eduardo Andrés Lauría
Ing. Oscar Norberto Schvarzer
Agrim Rubén Carlos Ramos

Resumen:

Altitudes Geopotenciales, Ortométricas y Normales Obtenidas por Compensación.
Una alternativa para la adopción de un sistema de referencia vertical.

El presente trabajo se orienta a obtener un sistema altimétrico, que resuelva el error de modelo producido por la falta de paralelismo de las superficies equipotenciales, el cual afecta el valor de las cotas geométricas.
Se analizan los inconvenientes y ventajas de las altitudes ortométricas, normales, geodinámicas, geopotenciales, etc. Se trata el caso en que la mayoría de estos cálculos requieren conocer la densidad media de la tierra en la zona, valor que al tener que estimarse (no se conoce) introduce desviaciones en las cotas corregidas.
Se estudia el caso en que existen incertidumbres acerca de cuál procedimiento adoptar para la región considerada. A efectos de obtener una decisión fundamentada, se presenta el enfoque de cómo llevar un concepto simple a un modelo matemático (generalmente complejo) y recíprocamente como interpretar los encadenamientos ecuacionales y procesos de simulación, para obtener conclusiones y procedimientos útiles.
Por último se presenta un original método estocástico, en el que mediante una compensación por mínimos cuadrados, se determinan los valores más probables de la altitud corregida $\mathbf{H_P}$ (ortométrica) y el valor ajustado de $\mathbf{G_M}$ (gravedad existente en el punto medio de la cota).
Este proceso constituye un nuevo método más preciso y de mayor confiabilidad, además de que se independiza del valor de la densidad de la tierra, que es desconocido y debe ser estimado.
También se sacan conclusiones de las cuales se desprende que con este sistema puede obtenerse la densidad media, despejándola de la fórmula de Bouguer, siendo este parámetro no sólo de utilidad Geodésica, sino también Geológica-Geofísica.
Además se analizan las propiedades de la cota Geopotencial, concluyéndose en las múltiples ventajas de aplicar este concepto dentro de formas específicas.

Aut.: *Eduardo A. Lauría; Oscar N. Schvarzer; Rubén C. Ramos*

Abstract:

Geopotential, Orthometric and Normal Altitudes arrived at through Compensation
An Alternative for the adoption of a vertical reference system.

This paper is aimed at developing an altimetrical system, which will solution the model error caused by the lack of parallelism of equal-potential surfaces, which affects geometric datum.
Advantages and drawbacks are analysed in reference to orthometric, normal, geodynamic, geopotential, etc. Altitudes. The case addressed is that the majority of these calculations need to know the average density of the earth in the area. A figure, which must be estimated (it is not known), therefore introducing distortions in the corrected datum.
The analysed case is one in which there is uncertainty towards what procedure is to be adopted for the region under study. In order to arrive at a decision based on a sound basis, we propose the approach of how to carry a simple concept to a mathematical model (generally complex) and reciprocally, how to read equation chains and simulation processes, in order to arrive at useful conclusions and procedures.
Lastly, we present a stochastic method in which through a compensation by minimal squares, we determine the more probable figures of the corrected altitude $\mathbf{H_P}$ (orthometric) and the $\mathbf{G_M}$ adjusted figure (existing gravity in the datum media).
This process is an original new method, more precise and more reliable, besides being independent of the earth s density figures, DM, which is unknown and must be estimated.

Other conclusions are also drawn from which the middle density figures may be arrived at through this system, resolving them from the Bouguer formula, this datum being not only of Geodesic use but also Geological-Geophysical.

Besides we analyze properties of the Geopotential datum, concluding on the multiple advantages of applying this concept within specific forms.

Aut.: Eduardo A. Lauría; Oscar N. Schvarzer; Rubén C. Ramos

Conceptos preliminares – Definiciones.

Se ha fijado como objetivo del trabajo, la obtención del sistema altimétrico que posea los valores más próximos posibles a las cotas reales.

Aceptamos como cota real de un punto a la longitud del tramo de la línea de fuerza (curva) que pasa por el mismo y está comprendida entre éste y el geoide. Esta línea es la envolvente de los distintos vectores gravedad en cada punto de esta trayectoria, es decir que la misma será perpendicular a las sucesivas superficies equipotenciales. Adoptamos para ella el nombre de "real" evitando el de "verdadero" ya que éste no existe en las magnitudes continuas.

Es sabido que resulta imposible determinar esta curva en forma exacta debido algunos de los siguientes factores:

- No se conoce la mencionada curvatura ni la relación de falta de paralelismo de las superficies equipotenciales.
- No es posible determinar en forma absoluta el lugar del geoide, el cual inclusive varía en función del tiempo.
- El punto sobre la superficie topográfica también está sujeto a indeterminaciones y movimientos, dependiendo además, estos parámetros de la cantidad de variables consideradas, el tiempo de observación, etc.
- No es posible determinar con absoluta precisión el valor de la densidad terrestre en el lugar, el cual además de nos ser constante, varía con el tiempo.

A fin de introducirnos en el desarrollo del problema en cuestión, es necesaria una breve síntesis acerca de los distintos sistemas de cotas. *En principio vale una primera clasificación distinguiendo entre aquellas de carácter exclusivamente geométrico y las que tienen en cuenta la influencia de la variable física que es la gravedad.*

Dentro de las primeras señalamos:

- ***Altitud geométrica***

Entendemos como tal a la obtenida en el proceso de nivelación tradicional, como $H_{geom_{Pf}} = \sum_{Pi}^{Pf} \Delta h_i + H_{geom_{Pi}}$ o la suma de lecturas de la mira de nivelación de atrás menos la de adelante, partiendo desde el nivel medio del mar (o un punto relacionado al mismo y/o vinculado a la cadena de mareógrafos, es decir comenzando desde una referencia que permita obtener una altitud equivalente a iniciar la medición desde el geoide

- ***Altitud Elipsoidal***

Definimos así a la distancia tomada sobre la normal al elipsoide, que pasa por el punto, comprendida entre el mismo y su intersección con la superficie elipsoidal. Generalmente se determina por observaciones satelitarias, principalmente GPS.

<u>Incluidas en del segundo grupo</u> (aquellas que tienen en cuenta los factores físicos terrestres) encontramos:

- ***Altitud aproximada***

Llamamos así a la corregida por la falta de paralelismo de las superficies equipotenciales debida exclusivamente al aplanamiento de una tierra ideal, (de densidad constante igual a la media) o sea que será la dada por la expresión

$$H_{aprox} = \frac{\sum g_i \, . \, \Delta h_i}{\bar{g}}$$

En donde:

g_i = gravedades normales o teóricas en las distintas estaciones de nivelación

Δh_i = desniveles geométricos

$\bar{g}$ = gravedad teórica en el punto medio de la altitud final.

Esta última gravedad teórica debería ser lo más próxima posible al valor medio de la integral:

$$\int_{Pi}^{Pf} g \quad dh$$

- ***Altitud geopotencial***

Definimos como altura geopotencial de una estación $P_{F,}$ al trabajo necesario para trasladar la unidad de masa desde el geoide hasta el punto considerado (o como la circulación del vector gravedad desde la superficie de referencia hasta el punto en cuestión). Es decir que vendrá dada por la fórmula:

$$H_{geop} = \sum_{Pi}^{Pf} gm_i \ . \Delta h_i$$

En donde:

$$gm_i = \frac{g_i + g_{i+1}}{2}$$

$con\ g_i = \text{gravedad medida en cada punto}$

Estas son altitudes teóricas, o simbólicas ya que no definen una longitud y sus unidades: [ergio/g] = [dina/g x cm] = [(cm/seg$^{2)}$ x cm] = [cm^2 /seg^2] o [gal x cm], etc. Se podrían utilizar como valores comparativos o para efectuar relaciones, y proporciones entre distintas cotas de esta misma naturaleza, siendo estos resultados válidos y de buena aproximación.

- ***Altitud normal***

Entendemos por tal a la obtenida aplicando correcciones de falta de paralelismo de las superficies de nivel debida al aplanamiento terrestre y a las masas subcorticales interpuestas (en forma heterogénea) o cualquier otra anomalía como variación de la densidad, etc. Lo que caracteriza a este tipo de altitud es que la gravedad del denominador se obtiene a partir de la normal, calculada teóricamente, sobre una tierra ideal, la cual está definida por la siguiente expresión:

$$H_{norm} = \frac{\sum_{Pi}^{Pf} gm_i \ . \Delta h_i}{g_m^P} = \frac{H_{geop}}{g_m^P}$$

Donde:

g_m^P : Gravedad reducida al punto medio de la variación de altura de la estación, exclusivamente por corrección de aire libre, en función de la gravedad teórica, partiendo del nivel del geoide o de la superficie de referencia considerada

Esta se suele calcular por la fórmula internacional de Cassini (recomendada en 1930 por la UIGG en el Congreso Mundial realizado en Estocolmo). La fórmula que proporciona esta gravedad ideal se obtiene por integración aplicada al elipsoide.

- ***Altitud ortométrica***

Se define como altura ortométrica a la obtenida por nivelación geométrica y corregida por la falta de paralelismo de las superficies equipotenciales debida a los efectos del aplanamiento terrestre y a la distribución anómala de masas interpuestas, debajo de la superficie topográfica (heterogeneidad debida a la distribución no uniforme de densidades) o sea que es aquella que responde a la fórmula:

$$H_{ortom} = \frac{\sum_{Pi}^{Pf} gm_i \,.\, \Delta h_i}{G_m^P}$$

Donde:

G^P_m: gravedad en el punto medio de la altitud del punto P_F, (en función del valor medido en la estación) es decir corregida a su valor equivalente, en la mitad de la altura Hp del punto, mediante las reducciones de aire libre y Bouguer. Según el caso puede considerarse también al corrección relacionada a causas isostáticas

- ***Altitud geodinámica:***

Definimos como tal al trabajo realizado sobre la unidad de masa para desplazarla desde el geoide hasta el punto considerado de la superficie topográfica, (o circulación del vector peso) dividido por un valor fijo de gravedad adoptado, generalmente a la media – normal (correspondiente a 45* de latitud y al nivel del mar) o representativa de la zona. Vendrá dada por la siguiente fórmula:

$$H_{geodín} = \frac{\sum_{Pi}^{Pf} gm_i \,.\, \Delta h_i}{\bar{G}_m}$$

Donde $\bar{G}_m$ o g_m es una gravedad fija tomada como referenciar, a efectos de utilizar un mismo valor para cualquier parte de la tierra.

Esta altitud está dada en metros, pero presenta una similitud con la geopotencial, ya que las alturas suelen no ser exactamente las más cercanas a los valores reales, razón por la cual es común que se las utilice en aplicaciones equivalentes a aquellas y pueden ser útiles para efectuar compensaciones debido a que en éste tipo de altimetrías las distancias entre superficies equipotenciales sería constante y las mismas tendrían la configuración de esferas concéntricas, lo cual simplificaría el planteo del ajuste.

- ***Altitud geodinámica exacta***

Tiene el mismo concepto que la anterior, pero para el denominador de la fórmula se toma como gravedad de referencia un valor promedio, correspondiente a una franja de latitud que comprende al área del levantamiento. Quedaría definida, entonces, por la siguiente expresión:

$$H_{geodin-exacta} = \frac{\sum_{Pi}^{Pf} gm_i \, .\Delta h_i}{g_{j_1}^{f_2} hm}$$

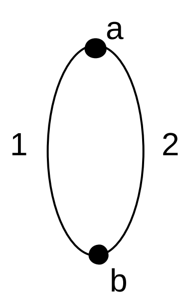
Donde $g_{j_1}^{f_2}$ es la gravedad normal media en la franja (J_1, j_2) que contiene al conjunto de polígonos y tomada a una altitud intermedia.

Esta presenta valores de cotas mucho más cercanos a los reales, razón por la cual se denomina exacta. El principal inconveniente reside en que su fórmula no es la misma para toda la tierra. En consecuencia los levantamientos no serían aptos para ser vinculados a redes de otras zonas o países.

<u>El método</u>

- ***Error de cierre de una nivelación geométrica corregida***

Supongamos dos recorridos de nivelación geométrica (1 y 2) entre los puntos *a* y *b*.



Para calcular el error de cierre de la nivelación debemos hacer $\Delta H_1 - \Delta H_2$ que es $\neq 0$.

Supongamos entonces que el objeto es mejorar el cierre de la nivelación, para lo cual debemos definir el sistema de alturas mas apropiado a adoptar.

Convenimos en que adoptaremos como tal a aquel que:

1) **Minimice el error de cierre**
2) **Implique la menor corrección posible a los valores de la nivelación geométrica.**

Independientemente del tipo de cotas que adoptemos, sabemos que una de las correcciones será por la consideración de la influencia física (gravedad) sobre los valores geométricos.

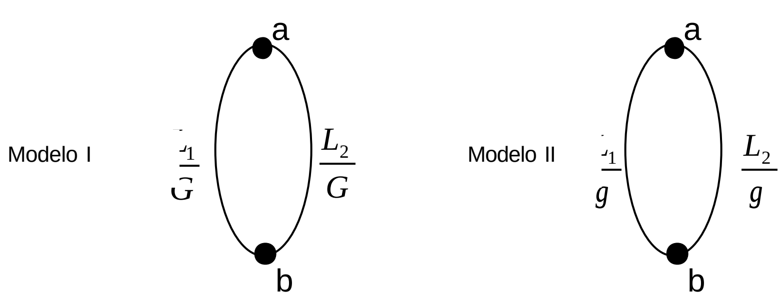
Recordando la definición de las cotas corregidas por falta de paralelismo de las superficies equipotenciales, evidenciamos que tendremos un numerador común, (para cualquier modelo altimétrico) que expresa el trabajo realizado contra la fuerza de gravedad para trasladar la unidad de masa desde **a** hasta **b**.

El mismo, en todos los casos, se obtiene a partir de mediciones sucesivas (en los puntos fijos) del valor de la gravedad. De manera que obtendremos:

$$L_1 = \left[\sum g_i * \Delta h_i\right]_1 \quad \text{y} \quad L_2 = \left[\sum g_i * \Delta h_i\right]_2$$

En el denominador de la expresión tendremos siempre un valor de gravedad que dependerá del concepto adoptado, quedando claro entonces que la mejor bondad del modelo vendrá dada por la mayor calidad del valor de la gravedad obtenido, el cual tenderá a satisfacer las dos condiciones impuestas más arriba.

Analicemos entonces el caso de un recorrido de nivelación geométrica al cual se lo intenta corregir por dos métodos distintos (por ejemplo ortométrico y normal) y llamemos *G* y *g* genéricamente a los valores de gravedad a utilizar en el denominador de la ecuación, con lo cual tenemos:



Si llamamos Δ al error de cierre de la nivelación corregida, tenemos:

$$\Delta_I = \frac{L_1}{G} - \frac{L_2}{G} \quad y \quad \Delta_{II} = \frac{L_1}{g} - \frac{L_2}{g} \quad => \quad \Delta_I = \frac{L_1 - L_2}{G} \quad y \quad \Delta_{II} = \frac{L_1 - L_2}{g}$$

Analicemos la diferencia entre los errores de cierre obtenidos por la aplicación de los cálculos I y II

$$\Delta_c = \Delta_I - \Delta_{II} = \frac{L_1 - L_2}{G} - \frac{L_1 - L_2}{g} = \frac{g\,L_1 - g\,L_2 - GL_1 + GL_2}{Gg} = \frac{g\,(L_1 - L_2) - G(L_1 - L_2)}{Gg} = \frac{(L_1 - L_2)(g - G)}{G\,g}$$

Pero L_1 y L_2 representan los trabajos realizados para trasladar la unidad de masa entre idénticas superficies equipotenciales, y por tratarse de una función potencial, los mismos no dependen del camino recorrido, de manera que la diferencia entre ellos, debería ser cero y en el caso real, vendrá dada solamente por los errores de medición o sea infinitesimal.

Otro aspecto es que g y G son valores de la gravedad obtenidos aplicando distintos modelos, pero necesariamente muy cercanos ya que son calculados como gravedades asignadas a un mismo punto, con lo que la diferencia entre ambos es despreciable y para la magnitud de los valores considerados constituye un infinitésimo.

De esta forma, queda demostrado que el numerador de la expresión constituye un producto de magnitud diferencial, (de segundo orden infinitesimal) siendo su resultado despreciable.

En consecuencia deberá ser para todos los criterios de obtención de la gravedad media (ubicada en el denominador) la diferencia de los errores de cierre: $\Delta_c = 0$ o sea $\Delta_I = \Delta_{II}$ = cte.

Es decir **que el error de cierre de una nivelación geométrica corregida es independiente del valor de gravedad adoptado para el denominador** (G o g u otro**).**

Por lo tanto, siendo el objeto del trabajo determinar el mejor sistema de alturas, y habiéndose verificado que la condición de minimizar el error de cierre no depende del modelo de G adoptado, convenimos en que habremos de elegir a aquel que a pesar de su indeterminación inevitable, sea lo suficientemente exacto y con un valor tal que arroje las menores correcciones posibles a los datos obtenidos por la nivelación geométrica.

La correspondiente comprobación práctica de esta demostración ha sido incluida en el **Anexo 1: “Error de cierre de una nivelación geométrica corregida”.**

Sintetizando, hemos dejado ya en claro, que los sistemas tradicionales (ortométrico y normal) difieren entre sí, en cuanto a su definición, exclusivamente en el valor representativo de la gravedad que estos adoptan para el denominador de la fórmula de altura.

Reafirmando la hipótesis anterior, podemos recordar que uno de los criterios que suelen utilizarse en cálculo de compensación, o procesos para mejorar precisiones, expresa que el método (o conjunto de resultados) más plausible es aquel que homogeneizando (o sea corrigiendo errores de cierre y/o logrando que por cualquier camino se calcule el mismo valor) utilice las mínimas correcciones posibles que deban aplicarse a los parámetros a ajustar. Este principio es aplicable a cualquier sistema de corrección o método orientado al aumento de exactitud. Tal propiedad nos permite utilizar distintas estimaciones de un genérico $\mathbf{G_M}$ (denominador) hasta encontrar aquella que homogeneizando, haga mínimas a las modificaciones de las cotas geométricas tradicionales, (suponiendo que las mediciones fueran correctas) y mientras se utilicen valores para esta gravedad, posibles o aceptables y representativos de la que realmente existe en el punto, dentro de la precisión requerida.

Sin duda, el punto crítico de las correcciones ortométricas, normales, geodinámicas, etc. es la obtención adecuada de este parámetro $\mathbf{G}_{M,}$ dado que para su calculo deben formularse hipótesis locales o globales que no siempre se cumplen y sus estimaciones para que fueran exactas deberían hacerse a través de algunos de los estudios geofísicos-geológicos, como: calicatas con análisis estratigráficos, sísmicos, geoeléctricos, geomagnetofísicos, gravimetrías regionales, etc.

Como parte de la investigación realizada, hemos aplicado correcciones ortométricas y normales a varias líneas y polígonos distribuidos en distintas zonas del país.

Vale señalar un dato significativo. En uno de los polígonos analizados el cálculo ortométrico arrojó una corrección de cota promedio de 21cm, mientras que el normal modificó mucho mas, presentando ambas el mismo mejoramiento del error de cierre (como era de esperar según lo ya demostrado con anterioridad). Desde la simple observación no podría inferirse cual de los resultados se acerca mas al valor real. Aplicando la hipótesis de las mínimas correcciones posibles, se evidencia, para este caso, que seria indiscutiblemente más apropiada la reducción ortométrica, además de que el orden de magnitud del reajuste por falta de paralelismo, estaría mucho más próximo a 21 cm. que a un valor mucho mayor, ya que la cota geométrica no puede estar desviada en magnitudes extremadamente grandes. Estas conclusiones son muy claras para este caso, pero no se podría decir lo mismo para otra zona, en que las correcciones por ambos métodos no arrojaran tales diferencias. Esta incertidumbre, podría resolverse mediante el método planteado a continuación.

Los resultados obtenidos en la práctica, han sido incluidos en el **Anexo 2: "Correcciones a los datos de nivelación aplicando los sistemas de alturas normales y ortométricas"**

<u>Un método alternativo:</u>

Los fundamentos anteriormente expuestos y las verificaciones prácticas realizadas, avalarían la posibilidad de ensayar una nueva forma para determinar la aceleración de la gravedad media, ajustando por el PMC (Principio de los Mínimos Cuadrados), a fin de obtener de ésta forma los valores más probables de H_R y G_M (Altitud real y Gravedad media).

Dado que a cada nodal[1] convergen por lo menos cuatro líneas, se pueden plantear en ese punto 4 ecuaciones, más otras 4 de minimización de variables (hipótesis de las mínimas correcciones).

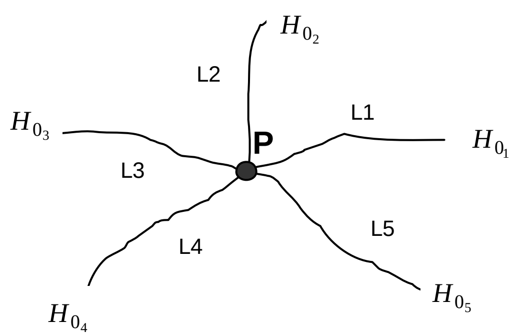
Podemos sumar allí una condición adicional que surge de la igualdad entre todas las cotas corregidas, del punto en cuestión, o sea la coincidencia de las obtenidas por los caminos que convergen en el nodal.

Teniéndose así. 5 incógnitas, una de corrección para G_M y cuatro para los H_{Pi} correspondientes a cada línea, lo cual implica que se presentara una redundancia :

$$\mathbf{n - r = 9 - 5 = 4}$$

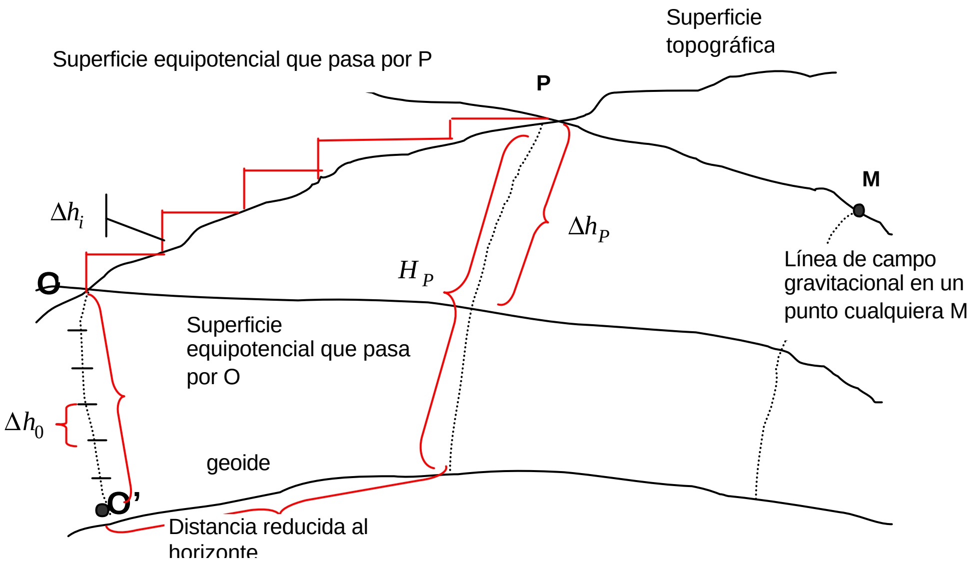
Esto permitiría efectuar un eficiente ajuste que de valores compensados de H_P y G_M,

Analicemos la situación planteada, suponiendo un punto nodal al cual convergen cinco líneas de nivelación.



Para el caso particular de cada una de ellas, tendríamos:

[1] Punto altimétrico de alta precisión materializado por la convergencia de líneas de nivelación.



Deseamos calcular el trabajo sobre la unidad de masa (o la circulación del vector gravedad) para llevarla desde el geoide hasta el punto P.

Para hacerlo es necesario dividir este trabajo en dos tramos para cada línea. El primero desde el geoide hasta el punto 0 de altura medida (H_0), y el segundo desde este al nodal. Recordemos que cada condición o igualdad que debe cumplirse puede dar lugar a una ecuación, ya sea de condición o de observación (indirecta) de manera que para un nodal al que convergen cinco líneas tendremos once ecuaciones con seis incógnitas de acuerdo a lo arriba expresado.

Llamemos:

g_0 al valor de la gravedad medido en 0.

g_P al valor de la gravedad medido en P.

Con N= Número de tramos de Δh_i entonces $g_{n+1} = g_P$

f = número de puntos en los que faltan gravedades medidas

N_g = número de gravedades medidas = N+1-f

(Si los Δh_i son N, entonces los puntos en los que hay o debiera haber gravedad medida son N+1).

- ***Corrección de Bouguer***

Conociendo la gravedad medida en **O** sobre la superficie topográfica, su valor $g_{0'}$ en **O'** (sobre el geoide) será :

$g_{0'} = g_0 - 0{,}119 \cdot 2H_0$ (considerando exclusivamente el efecto de las placas interpuestas)

y a una altura Δh_i sobre el geoide, $g_i = g_{0'} + 0{,}119\,\Delta h_i \; - \; 0{,}119\left(H_0 - \Delta h_i\right)$

O sea que: $g_i = g_0 - 0{,}119 \cdot 2H_0 + 0{,}119\,\Delta h_i \; - \; 0{,}119\left(H_0 - \Delta h_i\right)$

Dividiendo la altura H_0 en N tramos aproximadamente iguales Δh_0 tenemos $\Delta h_0 = \dfrac{H_0}{N}$

Y consideramos una altura parcial $\Delta h_P = \sum_i^P \Delta h_i = i_f \; \Delta h_0 = P\,\Delta h_0 \quad con \quad i_f = P$

Entonces

$$g_{o_{i_f}} = g_0 - 0{,}1119\,.\,2\,H_0 \; + \; 0{,}1119 \;\; \Delta h_0\,.\,P + 0{,}1119.\; P\,.\Delta h_0$$

$$\therefore g_{o_{i_f}} = g_0 - 0{,}2238\,H_0 + 0{,}2238\,.\,P\,.\Delta h_0$$

$$\therefore g_{o_{i_f}} = g_0 - 0{,}2238\left(H_0 - P.\Delta h_0\right)$$

Y este será el valor de gravedad corregido por Bouguer para cualquier punto P ubicado sobre la superficie topográfica que se encuentre a una altura p.Δh_{0_i}

- ***Corrección de Aire Libre***

Conocida la gravedad medida g_0 sobre la superficie topográfica y siendo H_0 la altitud medida del punto 0, a la cual dividimos en N tramos, la gravedad sobre el geoide corregida por el efecto de aire libre, será:

$$g_{0'} = g_0 + 0{,}3086H_0$$

Y en un punto a la altura $\Delta h_{0_P} = \sum_{i=1}^{P} \Delta h_{0_i}$ será :

$g_{0_P} = g_0 + 0{,}3086 H_0 - 0{,}3086 P.\Delta h_0 = g_0 + 0{,}3086 \left(H_0 - P.\Delta h_0 \right)$ De forma tal que el valor de la gravedad sobre un punto P ubicado a una altura Δh_P sobre el geoide,

en función de la gravedad medida g_0 , y corregida por los efectos de Bouguer y Aire Libre, vendrá dada por la fórmula :

$$g_P = g_0 - 0{,}2238 (H_0 - P.\Delta h_0) + 0{,}3086 (H_0 - P.\Delta h_0)$$

$$\boxed{g_P = g_0 + 0{,}048 \ (H_0 - P.\Delta h_0)}$$

y la gravedad promedio entre dos puntos sucesivos:

$$g_{0_{pm}} = \frac{g_{0_P} + g_{0_{P+1}}}{2}$$

$$g_{0_{pm}} = \frac{g_0 + 0{,}0848 \left(H_0 - P.\Delta h_0 \right) + g_0 + 0{,}0848 \left[H_0 - \left(P+1 \right) \Delta h_0 \right])}{2}$$

$$g_{0_{pm}} = \frac{2 g_0 + 0{,}0848 \left[2 H_0 - \left(2 P \Delta h_0 + \Delta h_0 \right) \right]}{2}$$

$$g_{0_{pm}} = g_0 + 0{,}0848 \left[H_0 - \left(P + 0{,}5 \right) \Delta h_0 \right]$$

Si consideramos los valores de gravedad promedio en el intervalo:

$$i = P$$

$$N \left[P = 1; P = N + 1 \right] \Rightarrow g_{0_{pm}} = g_0 + 0{,}0848 \left[H_0 - \left(P - 1 + 0{,}5 \right) \Delta h_0 \right]$$

$$N \left[i_0 = 1; i_f = N + 1 \right] \Rightarrow g_{0_{pm}} = g_0 + 0{,}0848 \left[H_0 - \left(P - 0{,}5 \right) \Delta h_0 \right]$$

En consecuencia, el trabajo de la unidad de masa para ser transportada desde el geoide hasta la superficie topográfica, o sea la circulación del vector gravedad, será :

$$L_0 = \int_{o'}^{P} \vec{g} \cdot \vec{dh}$$

$$L_0 \cong \sum_{i=1}^{N} \left\{ g_0 + 0{,}0848 \left[H_0 - (i-0{,}5)\Delta h_0 \right] \right\} \Delta h_0$$

$$L_0 \cong \sum_{i=1}^{N} \left\{ g_0\, \Delta h_0 + 0{,}0848 \left[H_0\, \Delta h_0 - (i-0{,}5)\Delta h_0{}^2 \right] \right\}$$

$$L_0 \cong \sum_{i=1}^{N} g_0\, \Delta h_0 + 0{,}0848 \left[\sum_{i=1}^{N} H_0\, \Delta h_0 - \sum_{i=1}^{N} (i-0{,}5)\Delta h_0{}^2 \right]$$

$$L_0 \cong N . g_0\, \Delta h_0 + 0{,}0848 \left[N . H_0\, \Delta h_0 - \left(\Delta h_0{}^2 \sum_{i=1}^{N} i - \sum_{i=1}^{N} 0{,}5 \Delta h_0{}^2 \right) \right]$$

$$L_0 \cong g_0\, H_0 + 0{,}0848 H_0{}^2 - 0{,}0848 \left(\Delta h_0{}^2 \sum_{i=1}^{N} i - 0{,}5 . N . \Delta h_0{}^2 \right)$$

$$L_0 \cong \Delta h_0 \left[g_0\, N + 0{,}0848 N^2 . \Delta h_0 - 0{,}0848 \left(\Delta h_0 \sum_{i=1}^{N} i - 0{,}5 . N . \Delta h_0 \right) \right]$$

- ***Planteo de las ecuaciones para la solución mediante el método por ajuste***

La expresión anterior nos da el trabajo sobre la unidad de masa (o la circulación de **g**) desde el geoide 0’ hasta el punto de arranque 0 del tramo de línea a la cual se le está aplicando la corrección por falta de paralelismo

Al segundo término de la circulación lo desarrollamos entre 0 y P en función de los Δhi y gi (medidos), o sea:

$$L = \sum_{i=1}^{N} g_{mi} . \Delta hi$$

$g_{mi} = (gi + g_{i+1}) / 2$, ... , $g_{m3} = (g_3 + g_4)/2$, ... , $g_{mn} = (g_n + g_{n+1}) / 2 = ((g_n + g_p) / 2) / g_{n+1} = g_P$

Luego tendremos $LT_l = L_{0l} + L_l$ (El subíndice “$_l$” indica el nº de línea que se está procesando).

LT_l es el trabajo total sobre la línea desde el geoide hasta el nodal considerado.

$L0_l$ es el trabajo desde el geoide 0’ hasta el punto de arranque 0 (en función de las g_{0i} calculadas).

L_l es el trabajo desde el punto de arranque 0 hasta el nodal final P (en función de las gi medidas).

Modelo matemático adoptado para la obtención de la cota corregida más probable calculada por el método del ajuste.

L: circulación del vector g desde el geoide hasta el punto considerado.

G_M : gravedad media a H / 2.

H_P: altitud geométrica o aproximada del punto P.

Δ_G : parámetro incógnita que corrige la G_M llevándola al valor ajustado.

Δ_H : parámetro incógnita que corrige a la cota H llevándola al valor compensado.

$$\mathbf{L - G_M . H_P = V}$$

$$\mathbf{L - [(G_M + \Delta_G) . (H_P + \Delta_H)] = 0}$$

$$\underbrace{G_M . H_P}_{l_{1i}} + \underbrace{G_M}_{a} . \underbrace{\Delta_H}_{x} + \underbrace{H_P}_{b} . \underbrace{\Delta_G}_{y} + \underbrace{\Delta_G . \Delta_H}_{\text{se desprecia}} - \underbrace{L}_{l_{2i}} = 0$$

$$\mathbf{l_i = - L_i = l_{1i} + l_{2i}}$$

$$\mathbf{G_M . H_P + G_M . \Delta_H + H . \Delta_G + \Delta_G . \Delta_H - L = V}$$

Resoluciòn Matricial del Sistema

A X + L = V

(AT W A) X + AT W L = 0

N K

$$\mathbf{X = - N^{-1} K}$$

Sistema de ecuaciones de Error

$$a_1 . X + Y_1 + l_1 = V_1$$
$$a_2 . X + Y_2 + l_2 = V_2$$
$$a_3 . X + Y_3 + l_3 = V_3$$
$$a_4 . X + Y_4 + l_4 = V_4$$
$$a_5 . X + Y_5 + l_5 = V_5$$
$$Y_1 = V_6$$
$$Y_2 = V_7$$
$$Y_3 = V_8$$
$$Y_4 = V_9$$
$$Y_5 = V_{10}$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = V_{11}$$
$$a_t . X + 4 Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5 = V_{12}$$

La anteúltima ecuación, se basa en que las correcciones que deberían aplicarse a las distintas cotas para obtener las ortométricas más probables, deberían ser iguales pero difieren ligeramente exclusivamente por consecuencia de los errores aleatorios, de manera que la sumatoria de los desvíos (correcciones a aplicar) debe tender a anularse por lo que se la igual a un desvío infinitesimal : $\Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 + \Delta H_5 = V_{11}$ y $\Delta H_i = Y_i$

La última ecuación es opcional según las características del modelo. La misma se obtiene de la siguiente forma:

$$4\, a_1 X + 4\, Y_1 - a_2 X - Y_2 - a_3 X - Y_3 - a_4 X - Y_4 - a_5 X - Y_5 = V_{11}$$

En el lugar de $4\, a_1 X + 4\, Y_1$ se debe colocar a la ecuación que posea mayor peso (esto después de haber obtenido los valores ponderables).

$(4\, a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5)\; X + 4\, Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5 = V_{11}$ donde:

$4\, a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 = a_t$ Quedando entonces:

$a_t \,.\, X + 4\, Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5 = V_{11}$ Ecuación nº 12

Reemplazamos los coeficientes por su valor

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_t & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

r = redundancia

n = número de ecuaciones

i = número de incógnitas

r = n – i = 12 – 6 = 6

- ***Cálculo de la matriz ponderal W***

Recordando la ley de propagación de los pesos (deducida de la de varianzas) y teniendo en cuenta que lo que se debe estimar es la ponderación de cada V_I, se tiene que:

Dada una F (x, y, ... , z) => **$1 / P_{F (x, y, \dots , z)} = (¶F/ ¶X)^2 . 1/P_X + (¶F/ ¶Y)^2 . 1/P_Y + \dots + (¶F/ ¶Z)^2 . 1/P_X$**

En la ley transcripta, suponemos que las correlaciones pueden despreciarse.

Aplicando la expresión anterior a la ecuación 1, se tendrá:

$1/ P_{V1} = (\partial V/ \partial a_1)^2 . 1/Pa_1 + (\partial V/ \partial_X)^2 . 1/P_X + (\partial V/ \partial_{Y1})^2 . 1/P_{Y1} + (\partial V/ \partial l_1)^2 . 1/Pl_1$

$$-l_1 = L_{T1} = \sum_{i=1}^{N} g_{mi} . \Delta hi + \sum_{i=1}^{N`} g_0 mi . \Delta h`i$$

$\partial V/ \partial l_1 = \partial V/ \partial L_{T1} = 1$

Donde:

$\sum_{i=1}^{N} g_{mi} . \Delta hi$ es el trabajo desde 0 hasta P y: $\sum_{i=1}^{N`} g_0 mi . \Delta hi$ es el trabajo desde 0´ hasta 0

$1/P_L = (\Delta h_i / H) . K$

donde K = constante de proporcionalidad

$\partial V/ \partial_{Y1} = 1$

$P_{Y1} = K2 / (\sigma_{GM} + \sigma_{\Delta Hi})^2 = K2 / 2 \sigma^2 = r / 2$ $\quad (Y_1 = G_M . \Delta H_i)$

$P \prec K / \sigma^2 = r$ donde $\underline{\prec}$ => proporcional a ...

Donde r = redundancia (como el peso que tendrán los valores compensados no se conoce a priori, se lo suele estimar asignándole el valor de la redundancia r)

$\partial V / \partial_X = a_1$ y $a_1 = H_{P1}$

$1/ P_X \cong 1 / r \prec 1/5$

$1/ P_X = K_3 / r$

$\partial V / \partial a_1 = X \cong G_M$

$a_1 = H_{P1}$

$P_{HP1} = 1 / D_1$

Donde D_1 es la distancia reducida al horizonte del tramo de nivelación OP

Si bien a los parámetros incógnitas se le asigna un $P \prec r$ (proporcional a la redundancia), aún sabiendo que este criterio no siempre se cumple con exactitud, se estima que los valores se encontrarán dentro de los requerimientos de este trabajo.

Es importante aclarar que para mayores precisiones deberían asignarse estos pesos como provisorios, efectuando una compensación estimadora y así obtener los pesos de los valores compensados de la Matriz de los Cofactores. Luego asignar nuevamente estos valores a los parámetros incógnitas y así seguir iterando hasta que no se verifique modificación.

Las constantes K_1, K_2, ..., Ki, deben sintetizarse en una Kr de manera que en cada caso se cumpla aproximadamente la relación:

$P_1 . \sigma_1^2 = P_2 . \sigma_2^2$ ó $P_0 . \sigma_0^2 = P . \sigma$ y $P_0 = 1 \therefore \sigma_0^2 = P_X . \sigma_X$ => $P_X = \sigma_0^2 / \sigma_X^2$

Tomando como estimador insesgado a la varianza de referencia, se tendrá que :

$P_X = K_i / \sigma_X^2$

Y con este criterio y considerando la varianza de la unidad de peso en cada situación, se obtendrá un K_T que proporcionalice a los distintos términos y parámetros. En síntesis:

$1 / P_{Vi} = G_M^2 \;.\; Di + H_{Pi}^2 \;.\; Ki / r + 2\, Ki / r + \Delta h_{oi} / H_{Pi} \;.\; Ki$

Esta fórmula es válida para las cinco primeras ecuaciones.

donde :

r = redundancia.

Di = distancia del tramo nivelado.

Δh_{oi} = altura parcial que resulta de la división.

H_{Pi} = cota del Nodal (geométrica)

De la ecuación 6 a la 10, la fórmula que se utiliza es la siguiente:

$1/ PV_{5+P} = 1 / Py_P \cong 2\, Ki / r$

$1/ PV_{11} = (4\, a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5)^2 \;.\; 1 / r + 4^2\, D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + 4^2 \;.\; 2/r + 4/r$

$$1 / Pv_{11} = (4a_1 + \sum_{i=1}^{5} ai)^2 1 / rK_1 + 16 D_1 + K_2 \sum_{i=2}^{5} D_i + K_3 36 / r$$

Obteniéndose así todos los elementos de la matriz ponderal

$$W = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 \end{pmatrix}$$

El vector independiente será :

$$L_V = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego resolvemos, aplicando el proceso clásico

$A . X + L_V = V$ Ecuaciones de Observación

$(A^T . W. A) . X + (A^T . W . L) = 0$ Ecuaciones Normales

donde: $(A^T . W. A) = N$ y $(A^T . W . L) = K$ quedando:

$N . X + K = 0$ Por lo tanto, será: $X = - N^{-1} . K$

Siendo:

$N^{-1} = Q\Delta\Delta$ Matriz de Cofactores.

$\sigma_0^2 = (V^T . W . V)/(n - i)$ Varianza de la unidad de peso

Y la matriz de varianza - covarianza será:

$$\sum xx = s_0^{\,2} Q\Delta\Delta$$

Sobre la base del desarrollo expuesto, estamos entonces en condiciones de obtener a través del método estadístico, valores más probables de alturas corregidas y simultáneamente magnitudes del valor de gravedad medio probadamente representativo de la zona de trabajo, en ambos casos con su correspondiente desvío estándar y acotación del error.

Conclusiones:

- Considerando, en principio, los dos métodos más usados para efectuar correcciones de alturas, y entendiendo por tales al ortométrico y normal, debe recordarse que a favor del primero obra el hecho de que para la obtención del indicador de gravedad medio se vale de valores medidos, pero sin embargo estima un parámetro de densidad que puede no ser la real.
- La corrección normal se independiza de valores de densidad terrestre supuestos, lo que en principio supone adquirir un carácter más "global", pero la supuesta tierra ideal no necesariamente coincide con la realidad del lugar.

Lo expresado permite afirmar que para cálculos que pretendan adecuadas precisiones, se requerirá de estudios estadísticos para la correcta adopción de uno u otro método.

- Para cualquiera de los dos procedimientos enunciados u otros que establezcan valores de gravedad medio, y siempre que el mismo se encuentre dentro de magnitudes de un orden razonable, el mejoramiento del error de cierre será significativamente similar, pudiendo interpretárselo idéntico en comparación con el orden de las magnitudes empleadas.

- Dado que la perturbación generada por la falta de paralelismo de las superficies equipotenciales es mínima frente a la dimensión de las magnitudes (más aún en extensiones normales y terrenos no muy quebrados) y basándonos en lo expresado en el párrafo anterior, deberemos considerar como más adecuado, a aquel método que efectúe los mínimos ajustes a los valores medidos. Lo enunciado constituye por sí mismo un criterio de selección de metodologías y elaboración de teorías o procedimientos.

- La altura más probable y el correspondiente valor de gravedad media en un punto, se pueden obtener aplicando las condiciones anteriores generando un sistema de observaciones indirectas que arrojará como resultado no sólo los valores más plausibles sino también los desvíos estándar que acotarán el error.

- Un recurso adicional para éste tipo de corrección consiste en aplicar meticulosamente métodos matemáticos como la ley de propagación de los pesos considerando todos los elementos de cada ecuación y el método iterativo hasta no obtener modificación de los parámetros, para elevar así la calidad del ajuste, ya que los pesos estarán óptimamente asignados.

- La posibilidad que brinda el método de obtener un valor de gravedad media más probable, permite indirectamente estimar la densidad real de la tierra a través de relaciones físicas avaladas matemáticamente. Esta predicción conjuntamente con otros estudios geofísicos, permite obtener resultados de gran utilidad para la geodesia física, geología y otras ramas de la física de la Tierra.

- Es posible considerar otros modelos de simulación para inserción válida en el cálculo, como por ejemplo medir la gravedad de un punto y luego calcular sus variaciones sucesivas desde la superficie topográfica hasta el geoide (aplicando las correcciones de Bouguer y Aire Libre) y así establecer un modelo que reemplace a la tradicional sumatoria de productos de desniveles medidos por valores de gravedad también observados, cuando a partir de un punto, una línea de nivelación no dispone de estos últimos hasta el nivel del mar. Este reemplazo nos proporciona el término físico representativo del trabajo sobre la unidad de masa que permite efectivizar el ajuste o aplicar en forma más completa los métodos clásicos de corrección de alturas geométricas.

Anexo 1: Error de cierre de una nivelación geométrica corregida.

El trabajo de investigación se realizó en el polígono de nivelación 108 A situado en la provincia de San Juan, en zona de Precordillera. Cuatro líneas de nivelación de Alta Precisión conforman el citado polígono :

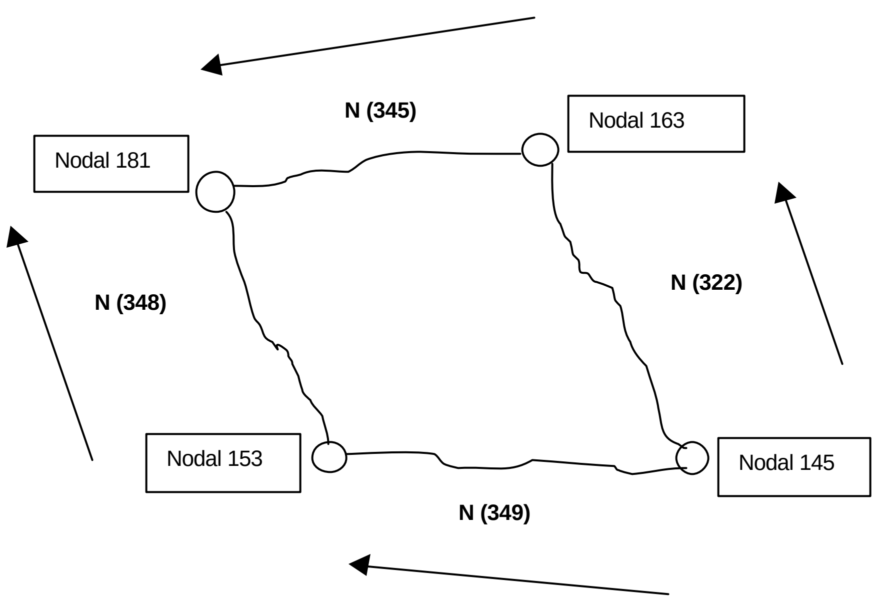
N(322) de Nodal 145 (San Juan) a Nodal 163 (San José de Jachal)

N(345) de Nodal 163 (San José de Jachal) a Nodal 181 (Las Flores)

N(349) de Nodal 145 (San Juan) a Nodal 153 (Calingasta)

N(348) de Nodal 153 (Calingasta) a Nodal 181 (Las Flores)

La siguiente figura nos muestra la configuración del polígono:



Las flechas indican el sentido creciente de las cotas.

Se consideraron dos recorridos:

Recorrido 1: Nodal 145 – N (322) – Nodal 163 – N (345) – Nodal 181

Recorrido 2: Nodal 145 – N (349) – Nodal 153 – N (348) – Nodal 181

Como observamos, ambos recorridos comienzan en el Nodal 145 y terminan en el Nodal 181. La diferencia de la sumatoria de los desniveles geométricos entre ambos recorridos nos dará el Error de Cierre de la nivelación geométrica en el Polígono 108 A.

La sumatoria de los desniveles geométricos en el Recorrido 1 es:

$$\sum \Delta Hgeom. = 1186{,}335\ m$$

La sumatoria de los desniveles geométricos en el Recorrido 2 es:

$$\sum \Delta Hgeom. = 1186{,}233\ m$$

El error de cierre de la nivelación geométrica es:

- ***Error de cierre de la nivelación geométrica = 10,2 cm***

La corrección a los datos de nivelación geométrica aplicando el sistema de cotas ortométricas arroja los siguientes resultados:

La sumatoria de los desniveles ortométricos en el Recorrido 1 es:

$$\sum \Delta Hortom. = 1186{,}506\ m$$

La sumatoria de los desniveles ortométricos en el Recorrido 2 es:

$$\sum \Delta Hortom. = 1186{,}451\ m$$

La diferencia de la sumatoria de los desniveles ortométricos entre ambos recorridos nos dará el Error de Cierre de la nivelación del Polígono 108 A aplicando corrección ortométrica.

Error de cierre de la nivelación aplicando Corrección Ortométrica = 5,5 cm

La corrección a los datos de nivelación geométrica aplicando el sistema de alturas normales arroja los siguientes resultados:

La sumatoria de los desniveles normales en el Recorrido 1 es:

$$\sum \Delta Hnorm. = 1186,208\ m$$

La sumatoria de los desniveles normales en el Recorrido 2 es:

$$\sum \Delta Hnorm. = 1186,152\ m$$

La diferencia de la sumatoria de los desniveles ortométricos entre ambos recorridos nos dará el Error de Cierre de la nivelación del Polígono 108 A aplicando corrección normal.

Error de cierre de la nivelación aplicando Corrección Normal = 5,6 cm

Conclusión: Los errores de cierre al pasar de la nivelación geométrica a las correcciones ortométricas y normales mejoran respectivamente en:

Cierre Geométrico	**Cierre Ortométrico**	**Cierre Normal**
10,2 cm.	***5,5 cm*.**	***5,6 cm.***
Mejoras de cierres :	**Ortométrico**	**Normal**
-----------------------------	***4,7 cm.***	***4,6 cm.***

Anexo 2: Correcciones a los datos de nivelación aplicando los sistemas de alturas normales y ortométricas

Recorrido 1:

PUNTO FIJO	ALTURA GEOMETRICA	Variación de la altura Geométrica por Corrección Ortométrica (mm)	Variación de la altura Geométrica por Corrección Normal (mm)
NODAL 145	642.78	*0*	0
1	629.308	*- 2*	+ 1
2	631.355	*- 2*	+ 1
3	658.616	*+ 2*	- 2
4	897.645	*+37*	-27
5	1060.607	*+60*	-45
6	906.158	*+38*	-28
7	956.302	*+45*	*-34*
8	971.726	*+47*	*-35*
9	956.464	*+45*	*-34*
10	929.590	*+41*	*-31*
11	912.720	*+39*	*-29*
12	902.676	*+37*	*-28*
13	900.697	*+37*	*-28*
14	911.914	*+39*	*-29*
15	939.673	*+43*	*-32*
16	981.018	*+49*	*-36*
17	1050.924	*+59*	*-44*
18	1097.037	*+65*	*-49*
19	1118.523	*+69*	*-51*
20	1146.821	*+73*	*-54*
NODAL 163	1169.592	*+76*	*-57*
9	1206.744	*+81*	*-61*

8	1262.220	*+89*	*-67*
7	1270.747	*+91*	*-67*
6	1397.936	*+109*	*-81*
5	1486.342	*+122*	*-91*
4	1521.881	*+127*	*-94*
3	1632.199	*+143*	*-106*
2	1776.046	*+163*	*-122*
1	1831.118	*+171*	*-128*
NODAL 181	1829.013	*+171*	*-127*

Recorrido 2:

PUNTO FIJO	ALTURA GEOMETRICA	Variación de la altura Geométrica por Corrección Ortométrica (mm)	Variación de la altura Geométrica por Corrección Normal (mm)
NODAL 145	642.78	*0*	0
1	671.053	+ *5*	- 2
2	700.597	*+11*	- 4
3	754.748	*+21*	- 8
4	810.276	*+31*	-11
5	899.379	*+47*	-17
6	930.445	*+53*	-20
7	1006.552	*+67*	*-25*
8	1089.243	*+82*	*-30*
9	1298.731	*+120*	*-45*
10	1245.450	*+111*	*-41*
11	1216.565	*+105*	*-39*
12	1272.902	*+116*	*-43*
13	1266.744	*+115*	*-42*
14	1296.169	*+120*	*-44*
15	1332.522	*+127*	*-47*

16	1345.687	*+129*	*-48*
NODAL 153	1361.736	*+132*	*-49*
1	1414.096	*+142*	*-52*
2	1396.389	*+138*	*-51*
3	1398.630	*+139*	*-51*
4	1467.076	*+151*	*-56*
5	1566.421	*+170*	*-63*
6	1747.609	*+203*	*-75*
7	2014.532	*+252*	*-93*
8	2214.776	*+289*	*-107*
9	2350.965	*+314*	*-116*
10	2524.970	*+346*	*-128*
11	2574.066	*+355*	*-131*
12	2301.166	*+305*	*-113*
13	2074.076	*+263*	*-97*
14	1970.500	*+244*	*-90*
15	1890.255	*+229*	*-85*
16	1832.342	*+218*	*-81*
17	1832.984	*+219*	*-81*
NODAL 181	1828.911	*+218*	*-81*

Anexo 3: Modelo matemático adoptado para la obtención de la cota corregida más probable calculada por el método del ajuste y su comparación con los métodos clásicos

Matriz de los coeficientes de las ecuaciones de observación (A):

$$\begin{pmatrix}
979434,459 & 0 & 0 & 0 & 0 & 723,906 \\
0 & 979434,459 & 0 & 0 & 0 & 723,913 \\
0 & 0 & 979434,459 & 0 & 0 & 723,935 \\
0 & 0 & 0 & 979434,459 & 0 & 723,931 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 979434,459 & 724,405 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Vector de los términos independientes

$$\begin{pmatrix} 333506,024 \\ 340010,786 \\ 359895,929 \\ 406560,165 \\ 854680,132 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

operando matricialmente

$$A\,X + L = V$$
$$(A^T\,W\,A)\,X + A^T\,W\,L = 0$$
con
$$(A^T\,W\,A)\,X = N$$
$$A^T\,W\,L = K$$
$$X = -N^{-1}\,K$$

Vector de los parámetros incógnitas (valores compensados)

$$\begin{pmatrix} -1,00 \\ 1,00 \\ -1,00 \\ 1,00 \\ -2,00 \\ -1,059 \end{pmatrix}$$

Resultado del valor de altura corregido H_P = 723,618 mts.

Resultado del valor de gravedad corregido G_M = 979433,40 mgal

Comparemos estos valores anteriores (calculados por las fórmulas clásicas) con los obtenidos por el método estadístico (por compensación) para el nodal (124) en cuestión:

Línea	Altura Ortométrica	Altura Normal
N(259)	723,532	723,486
N(226)	723,516	723,470
N(202)	723,558	723,512
N(203)	723,564	723,518
N(201)	723,566	723,520

La altura geométrica del Nodal 124 tiene un valor de 723,569 m

La gravedad reducida ortométricamente vale 979434,459 mgal

La gravedad reducida normal vale 979496,545 mgal

La corrección que arroja el valor compensado de $\mathbf{H_R} = \mathbf{H_P}$ respecto de la cota geométrica en **P** es:

$$\mathbf{V_R = H_R - H_{GEOM.} = 723{,}618 - 723{,}569 = 0{,}049\ m}$$

Es decir una corrección de aproximadamente 5 cm. Esta es ligeramente superior a las ortométrica y normal, obtenidas por el método clásico, de acuerdo a los resultados vistos anteriormente.

Conclusión Final: Se observa que el ajuste da valores muy próximos a los ortométricos y normales, calculados por los caminos clásicos. Este procedimiento se cumple, independientemente de que las correcciones por falta de paralelismo sean muy pequeñas, como en este caso; verificándose así la validez del método. Además queda en evidencia, la utilidad de este último camino, para cuando las distintas cotas corregidas difieren o también para el caso en que se requiere el valor de G_M Ya sea para estimar la densidad local de la corteza o con otro objetivo.

Bibliografía

Dado que el método expuesto es una idea original de los autores solo podrá darse bibliografía complementaria o de consulta

- Métodos de Geodesia de Satélites – Autor: Arnold C 1973, 222
- Geodesie Generale – Tome 2, pag 301, 324, 340, 348 y Tome 3: Geodesie fisic. – Autor: Parj. – J.Levallois
- Elaboración, Nivelación y Evaluación de la Exactitud de las Redes Geodésicas – Autor: Ustinov G. A.
- Teoría de las Alturas Ortométricas, Dinámicas y Normales – Autor: Eremiéevf 1951, c.11 – 25
- Fundamentos del Tratamiento Matemático de las mediciones – Autor: Polevoy V. A. 1971, 342 c.
- Curso de geodesia superior-Autor: P. S. Zakatov - Edit. MIR, 1981
- Geodesia - Autor:Wolfgang Torge- Edición 1983. Edit Diana
- Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses - Elsevier Scient. - 1973 - Autor : Bjerhammar, A.
- The GRIM2 earth Gravity field model. - Autor: Balmino G. Chr. , München 1976.
- Teoría de la Elaboración Matemática de Mediciones Geodésicas.-. Autor: V. Bolshakov y P. Gaidayev - Edit. MIR.
- Bulletin Géodésique - Journal of the Intenational Assotiation of Geodesy - Edit. Ivan J. Mueller - Vol. 56, Nº1 Anée 1982
- Ampliación de Estadísticas para Ingenieros.-. Autor: Johanes Blume - Nuevos manuales técnicos - labor.