



CAPITULO 7

MOVIMIENTO DEL AGUA SUBTERRANEA

7.1. FORMULA DE DARCY

Hagen (1839) y Poscuille (1846) estudiaron la circulación del agua a través de tubos capilares y demostraron que el caudal es proporcional al gradiente hidráulico. Darcy (1856) confirmó esta ley aplicándola al agua que percola en un filtro de arena.

La ley de Darcy se expresa como

$$v = P \frac{h}{l} \tag{7.1}$$

Introduciendo la ecuación de continuidad

$$Q = v_0 A \tag{7.2}$$

y llamando $i = \frac{h}{l}$ (7.3)

la ecuación de Darcy se expresa también como

$$Q = P \cdot i \cdot A \tag{7.4}$$

donde:

- v = velocidad macroscópica adimensional (m/día).
- P = coeficiente de permeabilidad o coeficiente de conductividad hidráulica, (también llamado K) en (m³/día/m²).
- l = distancia en la que se mide el gradiente hidráulico (m).
- h = diferencia de carga entre dos puntos (m).
- i = gradiente hidráulico (m/m).
- Q = flujo (m³/día).
- A = sección transversal del acuífero (m²).

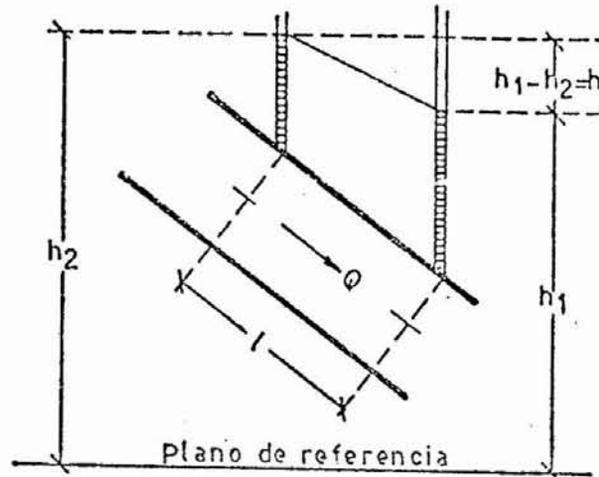


Fig. 7.1. Pérdida de carga de un flujo laminar uniforme a través de un terreno permeable

Si anotamos que (Fig. 7.2):

$$A = L \cdot m \quad (7.5)$$

y

$$T = P \cdot m \quad (7.6)$$

donde:

T = coeficiente de transmisibilidad ($m^3/\text{día}/m$).

m = espesor del acuífero (m).

L = ancho de la sección del acuífero considerado (m)

la ecuación (7.4) puede expresarse como

$$i = T \cdot i \cdot L \quad (7.7)$$

Vale decir que el caudal Q que fluye a través de un medio poroso es directamente proporcional a la permeabilidad P , a la sección A y a su gradiente o , alternativamente, al coeficiente de transmisibilidad T .

Las ecuaciones (7.3) o (7.7) pueden ser usadas para determinar la descarga de agua subterránea a través de canales subálveos, escorrentamiento subterráneo o para calcular la descarga o flujo de una determinada longitud del contorno de una superficie freática o de una superficie piezométrica.

Una simplificación de esos problemas se puede lograr por analogía con secciones rectangulares de acuíferos ideales como se muestra en el gráfico 7.2.

Gradiente Hidráulico:

Es la diferencia de carga entre dos puntos, dividido por la distancia, medida a lo largo del recorrido del flujo. En Fig. 7.1 y Fig. 7.2

$$i = \frac{h_1 - h_2}{l} = \frac{h}{l} \quad (7.8)$$

Ejemplo 7.1

Calcular el flujo de agua en un filete acuífero de arena y grava, siendo:

- P = 80 m³/día/m² (permeabilidad)
- i = 3 m/Km (gradiente hidráulico)
- A = m.L (sección promedio)
- m = 30 m (espesor promedio)
- L = 1.600 m (ancho promedio)

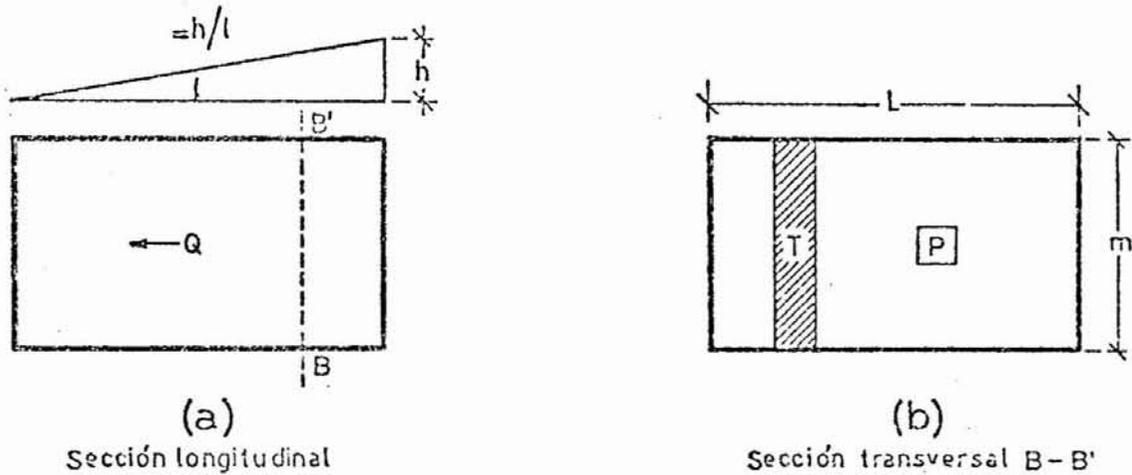


Fig. 7.2 Secciones ideales de un acuífero

Por ecuación (7.3)

$$\begin{aligned} Q &= P.i.A. \\ &= 80 \times \left(\frac{3}{1000}\right) \cdot (30 \times 1.500) \\ &= 10.800 \text{ m}^3/\text{día} \end{aligned}$$

o por ecuación (7.4)

$$Q = T.i.L$$

donde:

$$\begin{aligned} T &= P.m = 80 \times 30 = 2.400 \\ &= 2.400 \cdot \left(\frac{3}{1000}\right) \cdot 1.500 \\ &= 10.800 \text{ m}^3/\text{día} \end{aligned}$$

7.1.1. Condiciones de flujo

El análisis del flujo de agua subterránea requiere la discusión de algunos conceptos de la mecánica de los flúidos y definir algunos términos, por analogía con el flujo por tuberías.

Régimen laminar: es aquel en el cual las partículas del fluído siguen trayectorias paralelas sin mezclarse entre sí.

En una tubería cuyo fluído tenga un escurrimiento laminar (Fig. 7.1) la velocidad v se expresa como una función lineal del gradiente hidráulico.

$$v = \frac{\gamma D^2}{32 \mu} \frac{h}{l} ; \quad (7.9)$$

o en forma mas simple

$$v = C \frac{h}{l} \quad (7.10)$$

v = velocidad del flujo
 h/l = gradiente hidráulico o piezométrico
 μ = viscosidad dinámica del fluído
 γ = peso específico del fluído
 D = diámetro de la tubería

Régimen turbulento: es aquel en que las partículas del fluído cortan las trayectorias mezclándose unas con otras, pero avanzando en dirección de la corriente y la velocidad del flujo v se expresa como una función exponencial del gradiente hidráulico

$$v = C \sqrt{\frac{h}{l}} \quad (7.11)$$

donde:

$$C = \sqrt{\frac{f}{D2g}} \quad (7.12)$$

f = factor de fricción de Fanning.

Número de Reynolds: es un parámetro adimensional que indica la relación entre la viscosidad, que tiende a establecer un escurrimiento laminar, y las fuerzas de inercia

cuya resistencia al flujo tienden a establecer un régimen turbulento.

Esta relación se expresa como:

$$NR = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (7.13)$$

donde:

v = velocidad del fluido

ρ = densidad del fluido

μ = viscosidad dinámica del fluido

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = viscosidad cinemática del fluido

d = diámetro medio de los granos del medio permeable

D = diámetro de una tubería

Valores altos del número de Reynolds indican predominio de las fuerzas de inercia sobre la viscosidad. En tuberías se siguen los siguientes criterios:

$N_R < 2.000$ movimiento laminar, ecuación (7.10)

$2.000 < N_R < 40.000$ indeterminado

$N_R > 40.000$ movimientos turbulentos, ecuación (7.11)

7.1.2. Rango de aplicación de la Ley de Darcy

Conforme a la ecuación (7.1), se deduce que, siendo la velocidad una función lineal del gradiente, la Ley de Darcy es aplicable sólo al escurrimiento laminar en medio poroso.

Aunque Hubbert (1956) encontró las primeras apariciones de movimiento turbulento con N_R entre 600 y 700, Rose (1945) indica, de acuerdo a trabajo de numerosos investigadores, que la Ley de Darcy tiene un límite superior de N_R ubicado entre 1 y 10.

$$1 > N_R > 10$$

No hay un único valor en razón del ilimitado número de distribución de las partículas del medio poroso.

Teórica ni experimentalmente hay límite inferior para que se cumpla la Ley de Darcy a muy bajas velocidades de flujo.

Vale decir que la Ley de Darcy no se cumple para todo movimiento laminar, sino cuando hay predominio neto de la viscosidad o fuerzas de resistencia sobre las fuerzas de inercia. Ello ocurre mucho antes de llegar a un movimiento

to turbulento. No obstante, en pozos profundos en materiales bien permeables, en las proximidades del pozo se crean condiciones de flujo que escapan a la Ley de Darcy, aún cuando la misma sea aplicable en el cálculo de caudales de ese mismo acuífero.

Ejemplo 7.2.

En un pozo de 14 pulgadas (35,3 cm) de diámetro, cuyo filtro tiene 7 metros de largo y 30% de área de aberturas, se bombean 60 litros/segundo. El prefiltro de gravilla y arena gruesa tiene una granulometría media de 3 mm. Comprobar cual es el régimen del flujo al frente del filtro con el agua a temperatura de 12°C.

Solución

Area filtrante:

$$A = \pi \times 35,3 \times 700 \times \frac{30}{100} = 23.276 \text{ cm}^2$$

Caudal:

$$Q = 60.000 \text{ cm}^3/\text{seg.}$$

Velocidad media:

$$v = 60.000/23.276 = 2,57 \text{ cm/seg.}$$

Viscosidad cinemática (Tabla 7.1):

$$\nu = 1,23 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{seg.}$$

Entonces, el número de Reynolds es:

$$N_R = \frac{v d}{\nu} = \frac{2,57 \times 0,3}{1,23 \times 10^{-2}} = 63$$

Luego, cerca del filtro el movimiento sigue siendo laminar, pero ya no es válida la fórmula de Darcy.

TABLA 7.1

VISCOSIDAD CINEMATICA DEL AGUA EN FUNCION DE SU TEMPERATURA

(Según International Critical Tables,
1928, tomado de Benítez A.)

Temperatura en grados centígrados	Visc. cinemática en centistokes (10^{-2} cm ² /seg.)	Temperatura en grados centígrados	Visc. cinemática en centistokes (10^{-2} cm ² /seg.)
0	1,7923	20	1,0105
1	1,7321	21	0,9863
2	1,6741	22	0,9629
3	1,6193	23	0,9403
4	1,5676	24	0,9186
5	1,5188	25	0,8975
6	1,4726	26	0,8774
7	1,4288	27	0,8581
8	1,3874	28	0,8394
9	1,3479	29	0,8214
10	1,3101	30	0,8039
11	1,2740	31	0,7870
12	1,2396	32	0,7708
13	1,2068	33	0,7551
14	1,1756	34	0,7398
15	1,1457	35	0,7251
16	1,1168	36	0,7109
17	1,0888	37	0,6971
18	1,0618	38	0,6839
19	1,0356	39	0,6711

7.2 ECUACIONES DEL FLUJO

7.2.1 Definiciones

A los efectos de la discusión que sigue es necesario conocer el significado de algunos términos.

Acuífero isotrópico: la conductividad hidráulica P es la misma en todas las direcciones, o sea que la conductividad hidráulica horizontal es igual a la vertical u otra octogonal.

Acuífero anisotrópico: la conductividad hidráulica P cambia según la dirección del flujo, o sea que la conductividad hidráulica horizontal es diferente que la vertical u otra ortogonal.

Acuífero homogéneo: el acuífero presenta las mismas características físicas texturales y estructurales en todos sentidos.

Acuífero heterogéneo: el acuífero varía en sus características físicas en sentidos vertical y presenta estratificaciones.

7.2.2 Ecuación de Darcy Generalizada

En la Fig. 1 hemos considerado un caso unidireccional para expresar la fórmula de Darcy, (7,1) que también se escribe

$$v = - P \frac{h}{l} \quad (7.14)$$

Si se supone que la dirección del flujo tiene sentido contrario al gradiente hidráulico

Pero la dirección del flujo es variable en cada serie de intersticios y también las cargas hidráulicas h son variables. Por tanto si reemplazamos el sistema físico por un sistema continuo espacial y suponemos direcciones medias de flujo y cargas medias.

$$v = - P \frac{\partial h}{\partial l} \quad (7.15)$$

ello permite determinar la velocidad v en función de la permeabilidad P y el gradiente h a lo largo de una dirección cualquiera l .

Si se supone un medio anisotrópico, (lo que suele ocurrir en medios permeables homogéneos) y descomponemos la ecuación (7.14) según las proyecciones de sus magnitudes vectoriales sobre un sistema cartesiano rectangular, tendremos:

$$V_x = - P_x \frac{\partial h}{\partial x} ; V_y = - P_y \frac{\partial h}{\partial y} ; V_z = - P_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (7.16)$$

donde P_x , P_y y P_z son las permeabilidades que corresponden a los flujos de las direcciones x , y , z .

Por razones prácticas y dificultades de medición, supondremos que el medio es isotrópico, entonces

$$V_x = - P \frac{h}{x} ; V_y = - P \frac{h}{y} ; V_z = - P \frac{h}{z} \quad (7.17)$$

Podemos ver que las componentes del vector velocidad en un punto son las derivadas del escalar h multiplicadas por el coeficiente P , cambiadas de signo.

Introduciendo el nuevo escalar:

$$\phi = - P h$$

cuyo gradiente es el vector velocidad cambiado de signo, \emptyset resulta ser el potencial de velocidades. Cuando se cumple un potencial de velocidades en el flujo el régimen es irrotacional y se puede representar su escurrimiento mediante una red de corriente. Además se puede aplicar un análisis matemático y usar analogías con potenciales eléctricos, térmicos o elásticos para solucionar problemas complicados.

7.2.3 Ecuaciones diferenciales del flujo

Del análisis de las cantidades de flujo que pueden entrar y salir de un paralelepípedo elemental, haciendo intervenir la compresión mecánica de la arena del acuífero y la compresión del agua, se llega a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de las aguas subterráneas.

Flujo permanente tridimensional:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \text{(ecuación de Laplace)} \quad (7.18)$$

Flujo permanente bidimensional:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \text{ (ecuación de Laplace)} \quad (7.19)$$

Flujo variable tridimensional:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\theta \gamma_o}{P} (\beta + \frac{\alpha}{\theta}) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.20)$$

Flujo variable bidimensional:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\theta \gamma_o}{P} (\beta + \frac{\alpha}{\theta}) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.21)$$

Donde:

- x, y, z = coordenadas de un sistema cartesiano ortogonal
- h = potencial de presiones
- P = permeabilidad
- θ = porosidad
- γ_o = peso específico del agua a presión atmosférica
- α = coeficiente de compresibilidad vertical del acuífero
- t = tiempo

El problema de encarar la solución de ecuaciones dimensionales (7.18) y (7.20) en la práctica presenta dificultades, por lo que se adopta la hipótesis bidimensional con la componente vertical nula lo que responde a la mayoría de los problemas.

Si se introduce en el 2º término de la ecuación (7.21) el espesor del acuífero artesiano, m , y se aplica la relación de Jacob (1950) que vincula el coeficiente de almacenamiento S con la elasticidad de un acuífero artesiano:

$$S = \gamma_o \theta_m \left(\beta + \frac{\alpha}{\theta} \right) \quad (7.22)$$

Se tendrá que

$$\frac{\gamma_o \theta_m}{P_m} \left(\beta + \frac{\alpha}{\theta} \right) = \frac{S}{T} \quad (7.23)$$

Luego

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.24)$$

donde S es el coeficiente de almacenamiento y T el coeficiente de transmisibilidad.

7.2.4 Aplicaciones de las ecuaciones de flujo

Las ecuaciones (7.18) a (7.21) y (7.24) pueden ser aplicadas para la solución analítica de problemas de flujo de agua subterránea. Pero debe entenderse que, para ello, es necesario suponer estados ideales del acuífero y de sus condiciones limitantes aunque los resultados difieran de las condiciones reales de campo, pues de otra forma no sería posible obtenerlos.

Algunas idealizaciones son:

- para acuíferos: a. homogéneo e isotrópico
b. infinito (en extensión)
- para límites: a. impermeables (para techo o lecho de arcilla, roca o fallas)
b. permeables (incluyendo cuerpos de agua en contacto con el acuífero, aguas surgentes y pozos)

7.3 SISTEMAS DE LINEAS DE FLUJO

7.3.1 Definiciones

Línea de flujo: ruta a lo largo de la cual una partícula de agua se mueve a través de un acuífero en la dirección de la carga decreciente. Todd la define como la línea que en cualquier punto tiene por tangente al vector de velocidad macroscópica.

Línea equipotencial: línea que representa puntos de igual carga en un acuífero.

Línea isopiécica: curva de nivel de la superficie piezométrica de un acuífero.

Dibujo: las líneas de flujo son perpendiculares a las líneas equipotenciales e isopiécicas. La red está formada por una cuadrícula perfecta. Las líneas de flujo son paralelas a los límites impermeables; por lo tanto las líneas equipotenciales son perpendiculares a la de límite.

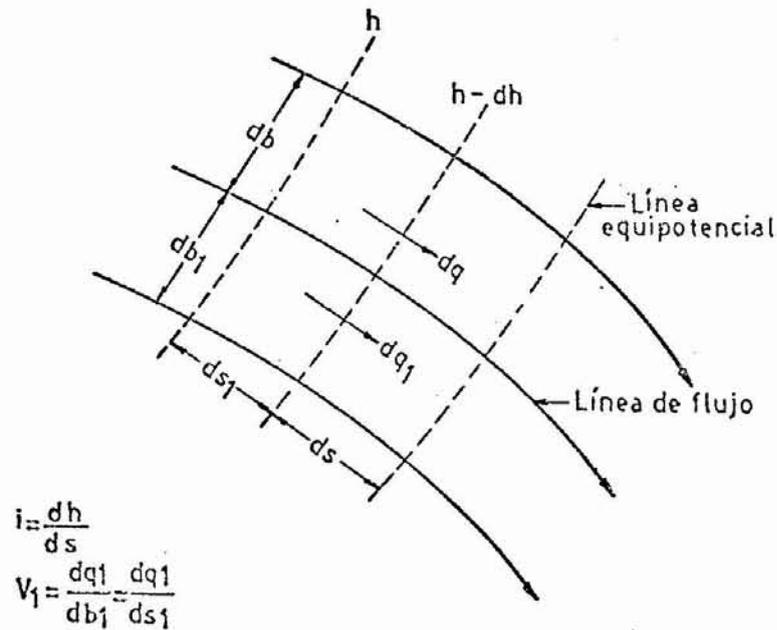


Fig. 7.3. Sección de una red de flujo ortogonal

7.3.2. Red de flujo

Siendo irrotacional el escurrimiento en un medio poroso se puede representar el movimiento del agua subterránea mediante una red de flujo

La red de flujo se construye por líneas de flujo cuya separación sea tal que entre ellas escurra un caudal dq constante y, normales a ellas, líneas equipotenciales que cortan a las líneas de flujo en ángulo recto. Estas líneas deben formar una cuadrícula (Fig. 7.3).

Ejemplo 7.3

Con la cota del nivel de tres pozos, establecer las líneas equipotenciales y la dirección del flujo. La solución se da en Fig. 7.4

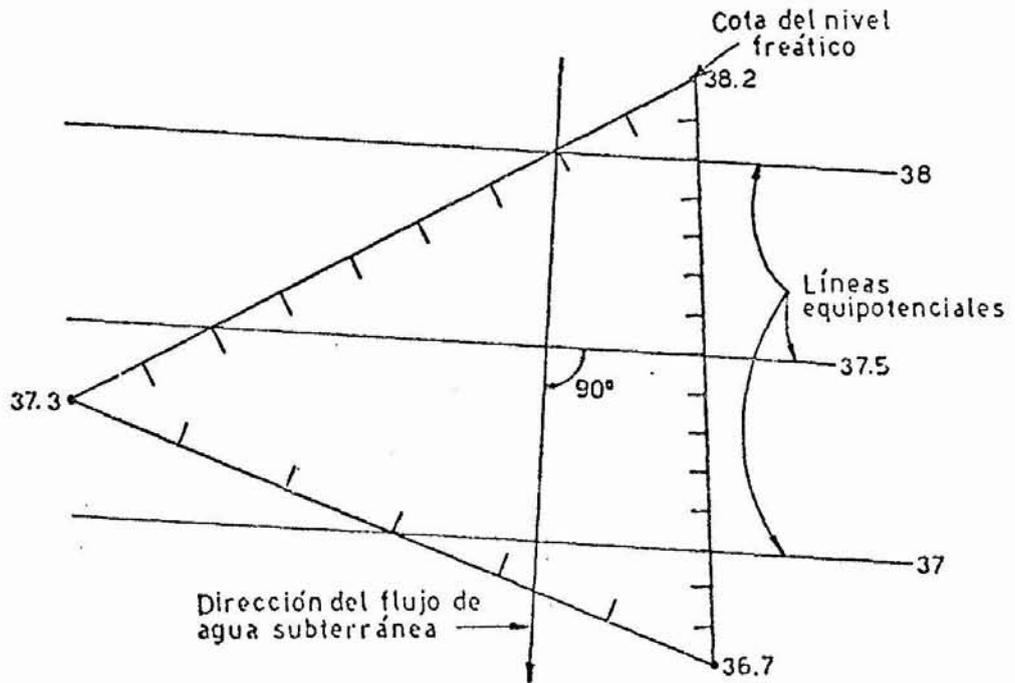


Fig. 7.4. Determinación de líneas equipotenciales y dirección del flujo por el método de los tres pozos.

Ejemplo 7.4

A partir de una carta de líneas isopiécicas, determinar áreas relativamente más favorables para la perforación de pozos.

En la Fig. 7.5 se trazan las líneas de flujo. Se consideran dos cuadrículas 1 y 2 de un mismo filete.

Por la ecuación de continuidad

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (7.25)$$

donde v es la velocidad y A la sección saturada perpendicular al flujo.

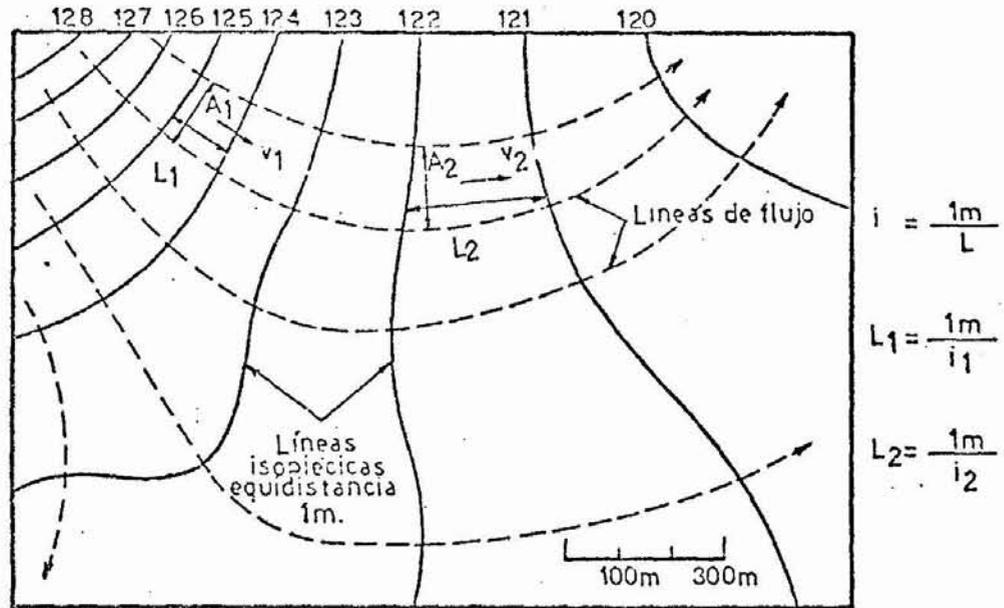


Fig. 7.5. Mapa de líneas equipotenciales y líneas de flujo

Como las líneas isopiécicas tienen equidistancia de 0,5.

$$i = \frac{0,5}{L} ; L = \frac{0,5}{i} \quad (7.27)$$

donde i es el gradiente hidráulico y L la distancia entre dos equipotenciales.

Por la ecuación de Darcy

$$P_1 A_1 i_1 = P_2 A_2 i_2 \quad (7.28)$$

donde P es el coeficiente de permeabilidad.

Si las líneas son casi paralelas y el espesor del acuífero uniforme, (7.28) se transforma en

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{i_2}{i_1} \quad (7.29)$$

La relación A_2/A_1 se puede estimar por la distancia entre las dos líneas de flujo: a) en un acuífero libre, si la diferencia de

altura del nivel freático entre las dos secciones es pequeño comparado con el espesor del acuífero saturado; b) en un acuífero confinado de espesor uniforme.

En un área de flujo de agua subterránea uniforme, la ecuación (7.29) indica que el área de cuadrícula que tiene muy espaciada las líneas isopiécicas (gradiente pequeño) tendrá mayor permeabilidad que el área de la cuadrícula con menor espaciamiento (gradiente mayor).

Por tanto la investigación de ubicación de pozos de gran rendimiento tendrá mejores resultados cerca de la cuadrícula 2 que la 1.

BIBLIOGRAFIA CITADA

CAPITULO 7

- BENITEZ, A. (1963): Captación de Aguas Subterráneas; Edit. Dosat, Madrid.
- CASTILLO, U.O y DOYEL W.W. (1963): Glosario de la Terminología de Agua Subterránea; Instituto de Investigaciones, Chile
- DARCY, H. (1856): Les Fontaines Publiques de Dijon; V. Dalmont, Paris.
- HUBERT, M.K. (1956): Darcy's Law And the Field Equations of the Flow of Under-ground Fluids; Trans. Amer. Inst. Min. and Met. Engrs. Vol. 207.
- TODD, D.K. (1959): Ground Water Hydrology; John Wiley & Sons, N.Y.

